ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ЕЕ ГРАФИКОМ

Отношение $\sqsubseteq$ для функций определяется в терминах их графиков.

Функция **f** менее определена (слабее), чем функция **g**, если **graph(f)** $\subseteq$ **graph(g)**.

Нигде не определенная функция (**λx.⊥**) не содержит никакой информации и ее графиком является пустое множество, а следовательно, для $\forall$ **f** $(\lambda x.\perp) \sqsubseteq f$.

Представление функции ее графиком дает возможность оценить информацию, содержащуюся в этой функции.

В общем случае любой элемент **d** произвольной области **D** может рассматриваться как объект множественного типа, содержащий «атомы» информации.

Тогда $\sqsubseteq_D$ может рассматриваться как отношение включения множеств, и оператор **наименьшей верхней грани** может рассматриваться как **объединение множеств**.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АРГУМЕНТОВ ФУНКЦИЯМИ

Функция **f: A→B** есть преобразование, которое переводит элемент **x** ∈ **A** в некоторый элемент **f(x)** ∈ **B**.

Если **x** рассматривается как множество атомов, то **f** преобразует **x**, сопоставляя каждому атому **x** элемент в области **B** и объединяя их в этой области.

Если **x** $\sqsubseteq_{\mathbf{A}}$ **y**, то применение функции **f** должно привести к аналогичной ситуации в области **B**, т.е. из большего количества информации об аргументе должно быть произведено большее количество информации о результате.

МОНОТОННЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Определение 1. Функция **f: A→B монотонна**, если и только если для $\forall$ **x, y** $\in$ **A**, из $\mathbf{x} \sqsubseteq_{\mathbf{A}} \mathbf{y}$ следует, что $\mathbf{f(x)} \sqsubseteq_{\mathbf{B}} \mathbf{f(y)}$.

Немонотонные функции считаются плохими, причем очень часто они являются невычислимыми.

Таким образом, требуется, чтобы функции, используемые в денотационной семантике были **монотонные**. Это требование гарантирует, что любое семейство функций $\bot$, $\mathbf{F(\bot)}$, $\mathbf{F(F(\bot))}$, … , $\mathbf{F^i(\bot)}$, … , генерируемое функционалом **F**, является цепью.

Однако, для развития семантики фиксированной точки требуется более сильное свойство, чем монотонность.

МОНОТОННЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Аналогично тому, как бинарная операция $\sqcup$ обобщается операцией взятия **н.в.г.** для множества аргументов, так и **условие монотонности** обобщается **свойством непрерывности**.

Определение 2. Для п.ч.п. **A** и п.ч.п. **B** монотонная функция **f: A→B** является **непрерывной**, если и только если для любой цепи $\mathbf{X \subseteq A}$ $\mathbf{f(\sqcup X) = \sqcup\{f(x) \mid x \in X\}}$.

Утверждение 1. Пусть **A** и **B** – частично упорядоченные множества, элементы **x**, **y** $\in$ **A** образуют цепь в **A**, и **f: A→B** – монотонная функция. Тогда $\mathbf{f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y)}$.

Доказательство. Непосредственно следует из определения цепи и монотонности функции **f**.

МОНОТОННЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Утверждение 1 можно обобщить для случая конечного множества аргументов (конечных цепей).

В то же время, как видно из определения, свойство непрерывности является обобщением свойства монотонности и для бесконечных цепей, а не только конечных.

Непрерывная функция сохраняет пределы цепей. Таким образом, **f(⊔X)** содержит в точности столько же информации, что и объединение информации, полученной из атомов **X** в результате применения функции **f**.

Нетрудно показать, что всякая непрерывная функция является также и монотонной.

МОНОТОННЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Непрерывные функции обеспечивают возможность обработки объектов бесконечного размера (информационного содержания).

Для некоторых бесконечных объектов **Y** невозможно задать представление **Y** в памяти машины, поэтому **f(Y)** невычислима обычным путем (в частности, когда **Y** является функцией).

Если же **Y** есть н.в.г. цепи $\{y_i \mid i \in Nat\}$, где каждое y_i имеет конечный размер, и **f** – непрерывная функция, то каждое y_i может быть представлено в памяти ЭВМ и **f** может быть применена к нему. Требуемое значение **f(Y)** строится по частям как $f(y_0) \sqcup f(y_1) \sqcup f(y_2) \sqcup \ldots$. Поскольку $\{f(y_i) \mid i \in Nat\}$ образует цепь и **f** – непрерывная функция, то $f(Y) = \sqcup\{f(y_i) \mid i \in Nat\}$.

Для полного вычисления ответа потребуется бесконечное количество времени, но любая часть ответа **f(Y)** будет получена за конечное время.

МИНИМАЛЬНЫЕ ФИКСИРОВАННЫЕ ТОЧКИ

Функционалом будем называть непрерывную функцию **F: D→D**, где **D** есть область вида **A→B**.

Определение 3. Для функционала **F: D→D** и элемента **d** ∈ **D**, **d** является фиксированной точкой **F** если и только если **F(d) = d**.

Фиксированная точка d является **минимальной фиксированной точкой F**, если для ∀ **e** ∈ **D** из **F(e) = e** следует, что **d⊑e**.

ТЕОРЕМА КЛИНИ

Теорема Клини (аппроксимации Клини).

Если область **D** является п.ч.п., то минимальная фиксированная точка непрерывного функционала **F: D→D** существует и определяется как $\mathbf{fix\ F} = \sqcup\{f^i(\perp) \mid i \geq 0\}$.

Доказательство. Докажем вначале, что **fix F** является фиксированной точкой **F**.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{fix\ F}) &= \mathbf{F}(\sqcup\{\mathbf{F}^i(\perp) \mid i \geq 0\} \\
&= \sqcup\{\mathbf{F}(\mathbf{F}^i(\perp)) \mid i \geq 0\} && \text{(по непрерывности } \mathbf{F}\text{)} \\
&= \sqcup\{\mathbf{F}^i(\perp) \mid i \geq 0\} && \text{(т.к. } \mathbf{F}^0(\perp) = \perp \text{ и } \perp \sqsubseteq \mathbf{F}(\perp)\text{)} \\
&= \mathbf{fix\ F}
\end{aligned}
$$

Далее докажем, что **fix F** – минимальная фиксированная точка **F**.

Пусть $\mathbf{e} \in \mathbf{D}$ – фиксированная точка **F**. Тогда, из $\perp \sqsubseteq \mathbf{e}$ и монотонности **F** следует: $\mathbf{F}^i(\perp) \sqsubseteq \mathbf{F}^i(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$ для всех $\mathbf{i > 0}$.

Отсюда следует, что $\mathbf{fix\ F} = \sqcup\{\mathbf{F}^i(\perp) \mid i \geq 0\} \sqsubseteq \mathbf{e}$, ч.т.д.

ТЕОРЕМА КЛИНИ

Теорема Клини показывает, как эффективно аппроксимировать минимальные фиксированные точки непрерывной функции.

Из этой теоремы следует важный результат.

В качестве значения рекурсивного определения **f = F(f)** берется **fix F**, т.е. минимальная фиксированная точка функционала **F**.

Для обоснования возможности получения решений для семантических определений необходимо показать, что семантические области являются полными частичными порядками и что операции над ними являются непрерывными.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ОБЛАСТИ КАК П.Ч.П.

Вначале необходимо ответить на вопрос о том, какой частичный порядок должен быть наложен на простейшую область.

Каждый элемент простейшей области является отдельным атомарным значением.

Например, в области **Nat** элементы **«0»** и **«1»** являются значениями, но ни один из них не содержит информации более, чем другой. Количество информации, содержащейся в них, равно, но различны их значения.

Множество **Nat** является **дискретным частичным порядком**.

В дальнейшем будем всегда накладывать на простейшие области дискретный частичный порядок.

ДИСКРЕТНЫЙ ЧАСТИЧНЫЙ ПОРЯДОК

Утверждение 2. Любое множество элементов **D** с дискретным частичным порядком имеет н.в.г. для каждой цепи и любая операция **f: D→D** является непрерывной.

Доказательство. Немедленно следует из определений н.в.г. и непрерывности, поскольку все цепи в **D** одноэлементны.

Рассмотрим далее преобразование частично упорядоченных областей, для которых каждая цепь имеет н.в.г., в п.ч.п.

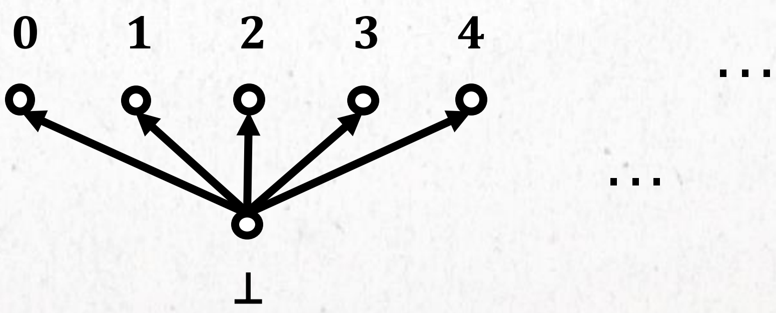
Определение 4. Для частично упорядоченного множества **A** с порядком $\sqsubseteq_{\mathbf{A}}$ добавление нижнего элемента ($\perp$) приводит к множеству $\mathbf{A}_{\perp}\mathbf{=A}\cup\{\perp\}$, частично упорядоченному отношением $\sqsubseteq_{\mathbf{A}_{\perp}}$, так что $\mathbf{d} \sqsubseteq_{\mathbf{A}_{\perp}} \mathbf{d'}$, если и только если $\mathbf{d} \equiv \perp$, либо $\mathbf{d}, \mathbf{d'} \in \mathbf{A}$ и $\mathbf{d} \sqsubseteq_{\mathbf{A}} \mathbf{d'}$.

ДИСКРЕТНЫЙ ЧАСТИЧНЫЙ ПОРЯДОК

Утверждение 3. Если **A** – частично упорядоченное множество, для каждой цепи которого существует н.в.г., то $\mathbf{A}_\perp$ – п.ч.п.

Кроме того, если **(λx.e): A→B** – непрерывная функция, то **(λx.e): $\mathbf{A}_\perp$→B** также является непрерывной функцией.

На рисунке изображена область $\mathbf{Nat}_\perp$, образованная из области **Nat**, являющаяся п.ч.п.



ПОСТРОЕНИЕ СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Сложные области строятся на базе простейших с помощью специальных **конструкторов**.

Частичный порядок в сложных областях базируется на упорядочениях его компонентов-областей.

Определение 5. Для частично упорядоченных множеств **A** и **B** декартово произведение **A×B** есть множество $\{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$, частично упорядоченное отношением $\sqsubseteq_{A\times B}$, причем $(a,b) \sqsubseteq_{A\times B} (a',b')$, если и только если $a \sqsubseteq_A a'$ и $b \sqsubseteq_B b'$.

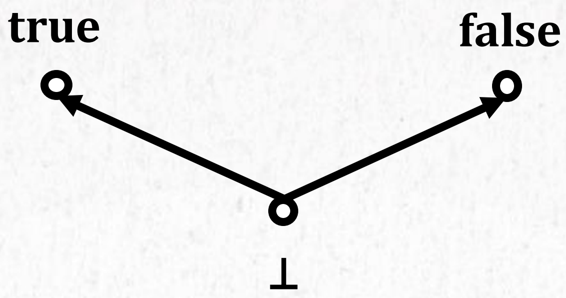
Декартово произведение можно расширить и на произвольное количество аргументов.

Порядок на n-мерных векторах определяется аналогично порядку на парах элементов.

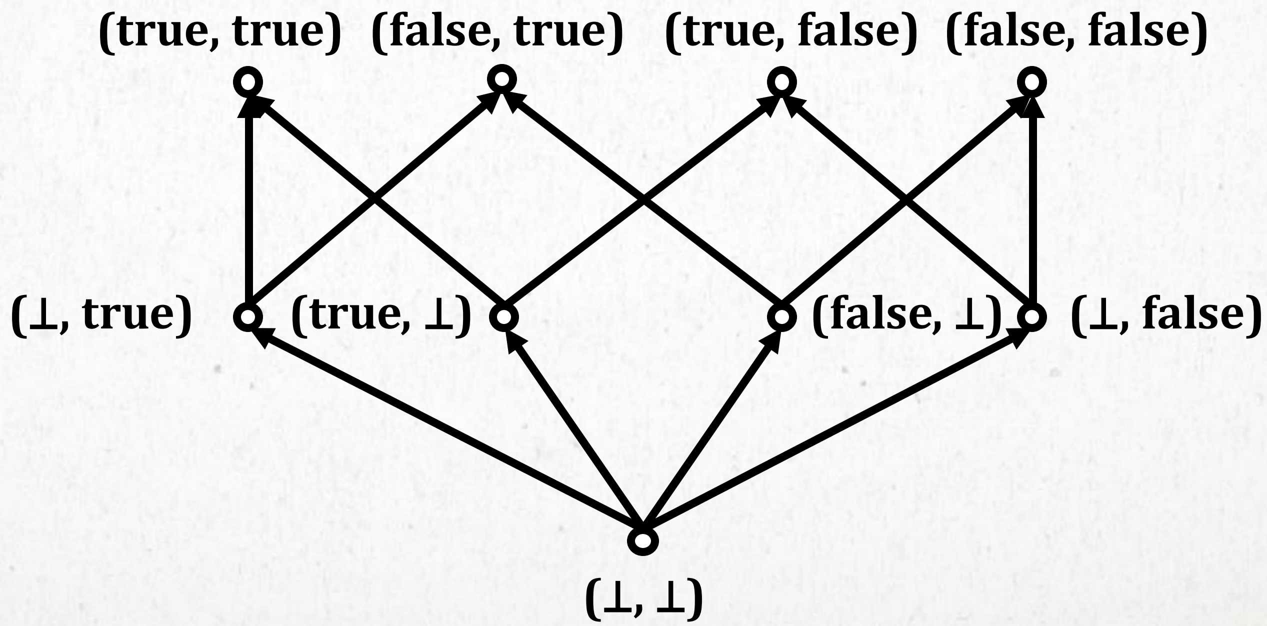
ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ

<u>Пример:</u> декартово произведете **B×B**, где **B = {true, false}**.

B =



B×B =



ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Утверждение 4. Если **A** и **B** – п.ч.п., то **A×B** – п.ч.п. и ассоциированные с ним операции непрерывны.

Доказательство. Любая цепь **C** в **A×B** имеет вид:

$\mathbf{C = \{(a_i, b_i) \mid a_i \in A, b_i \in B, i \in I\}}$ для некоторого множества индексов **I**. По определению **A×B** оба множества $\mathbf{M = (a_i \mid i \in I\}}$ и $\mathbf{N = \{b_i \mid i \in I\}}$ – цепи в **A** и **B** с н.в.г. $\sqcup$**M** и $\sqcup$**N** соответственно.

Тогда, из определения н.в.г., следует, что $\mathbf{\sqcup C=(\sqcup M,\sqcup N)}$.

Таким образом, **A×B** – частично упорядоченное множество, в котором каждая цепь имеет н.в.г. Если, кроме того, **A** и **B** имеют оба нижние элементы, то $(\perp,\perp)$ есть нижний элемент в **A×B**, отличный от $\perp$. Отсюда, с учетом предыдущего, следует, что **A×B** п.ч.п. Из того факта, что $\mathbf{\sqcup C = (\sqcup M, \sqcup N)}$, следует непрерывность операции спаривания.

ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Покажем теперь, что операция взятия 1-го компонента (**fst**) – непрерывна.

Рассмотрим цепь **C** в **A×B**.

Тогда:

$\sqcup\{\mathbf{fst}(a_i,b_i) \mid i \in I\} = \sqcup\{a_i \mid i \in I\} =$

$\mathbf{fst}(\sqcup \{a_i \mid i \in I\},\sqcup\{b_i \mid i \in I\}) = \mathbf{fst}(\sqcup M,\sqcup N) =$

$\mathbf{fst}(\sqcup C) = \mathbf{fst}(\sqcup\{(a_i,b_i) \mid i \in I\})$,

что и доказывает непрерывность операции **fst**.

Доказательство того факта, что операция взятия второго компонента (**snd**) непрерывна, осуществляется аналогично, что и завершает доказательство утверждения.