

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОТ МНОГИХ АРГУМЕНТОВ

Рассмотрим вопрос о непрерывности функции от многих аргументов.

Утверждение 5. Функция $f: D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n \rightarrow E$ непрерывна, если и только если она непрерывна по каждому своему аргументу в отдельности, т.е. f непрерывна в $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$, если и только если она непрерывна в каждом D_i , $1 \leq i \leq n$, при неизменных других аргументах.

Перед тем, как привести доказательство **утверждения 5** докажем полезное дополнительное утверждение:

Утверждение 6. Пусть для $i, j \in I$, где $I = 0, 1, \dots$, x_{ij} является элементом п.ч.п. $\mathbf{C}$. Предположим, что для всех i, j, k, l , если $i \leq k$ и $j \leq l$, то $x_{ij} \sqsubseteq x_{kl}$. Тогда $\sqcup \{ \sqcup \{ x_{ij} \mid j \in I \} \mid i \in I \} = \sqcup \{ \sqcup \{ x_{ij} \mid i \in I \} \mid j \in I \} = \sqcup \{ x_{kk} \mid k \in I \}$.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОТ МНОГИХ АРГУМЕНТОВ

Доказательство утверждения 6.

Для любого i справедливо, что $x_{i0} \sqsubseteq x_{i1} \sqsubseteq \dots$, а следовательно и $\sqcup\{x_{ij} \mid j \in I\}$ существует для любого i . Далее, поскольку для любых i и j справедливо, что $x_{ij} \sqsubseteq x_{i+1,j}$, то имеем, что $\sqcup\{x_{ij} \mid j \in I\} \sqsubseteq \sqcup\{x_{i+1,j} \mid j \in I\}$, а следовательно $\sqcup\{\sqcup\{x_{ij} \mid j \in I\} \mid i \in I\}$ существует. Аналогично можно показать, что $\sqcup\{\sqcup\{x_{ij} \mid i \in I\} \mid j \in I\}$ существует. Существование $\sqcup\{x_{kk} \mid k \in I\}$ очевидно.

Для всех i и j справедливо:

$x_{ij} \sqsubseteq \sqcup\{x_{ij} \mid i \in I\} \sqsubseteq \sqcup\{\sqcup\{x_{ij} \mid i \in I\} \mid j \in I\}$, а следовательно $\sqcup\{x_{ij} \mid j \in I\} \sqsubseteq \sqcup\{\sqcup\{x_{ij} \mid i \in I\} \mid j \in I\}$ справедливо для любого i . Отсюда получаем, что $\sqcup\{\sqcup\{x_{ij} \mid j \in I\} \mid i \in I\} \sqsubseteq \sqcup\{\sqcup\{x_{ij} \mid i \in I\} \mid j \in I\}$.

Аналогично (по симметрии) можно доказать обратное утверждение, откуда, с учетом предыдущего, получаем, что:

$$\sqcup\{\sqcup\{x_{ij} \mid j \in I\} \mid i \in I\} = \sqcup\{\sqcup\{x_{ij} \mid i \in I\} \mid j \in I\}.$$

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОТ МНОГИХ АРГУМЕНТОВ

Докажем справедливость – второго равенства **утверждения 6**.

Возьмем для каждого элемента x_{ij} $k=\max(i,j)$. Тогда $x_{ij} \sqsubseteq x_{kk}$ откуда следует, что $x_{ij} \sqsubseteq x_{kk} \sqsubseteq \sqcup \{x_{kk} \mid k \in I\}$. Отсюда получаем, что

$$\sqcup \{ \sqcup \{x_{ij} \mid i \in I\} \mid j \in I \} \sqsubseteq \sqcup \{x_{kk} \mid k \in I\} \quad (*)$$

Далее, для любого $k \in I$ существуют такие $i \leq k$ и $j \leq k$, что $x_{kk} \sqsubseteq x_{ij}$ а следовательно $x_{kk} \sqsubseteq \sqcup \{ \sqcup \{x_{ij} \mid i \in I\} \mid j \in I \}$, откуда вытекает, что

$$\sqcup \{x_{kk} \mid k \in I\} \sqsubseteq \sqcup \{ \sqcup \{x_{ij} \mid i \in I\} \mid j \in I \} \quad (**)$$

Из (*) и (**) следует, что

$$\sqcup \{ \sqcup \{x_{ij} \mid i \in I\} \mid j \in I \} = \sqcup \{x_{kk} \mid k \in I\}$$

что завершает доказательство **утверждения 6**.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОТ МНОГИХ АРГУМЕНТОВ

Доказательство утверждения 5. Приведем доказательство для функции от двух аргументов ($f: D_1 \times D_2 \rightarrow E$). Доказательство в общем случае будет очевидным расширением этого доказательства.

В одну сторону. Пусть f – непрерывная функция. Покажем, что она непрерывна в D_1 и D_2 . Докажем непрерывность функции в D_1 . Для этой цели зафиксируем аргумент $x \in D_2$. Пусть $\{d_i \mid d_i \in D_1, i \in I\}$ – цепь в D_1 . Тогда:

$$\sqcup \{f(d_i, x) \mid i \in I\} = \quad (\text{по непрерывности } f)$$

$$f(\sqcup \{(d_i, x) \mid i \in I\}) = \quad (\text{утверждение 6})$$

$$f(\sqcup \{d_i \mid i \in I\}, \sqcup \{x\}) =$$

$$f(\sqcup \{d_i \mid i \in I\}, x),$$

откуда следует непрерывность f по первому аргументу.

Доказательство непрерывности f в D_2 осуществляется аналогично. Таким образом, утверждение в одну сторону доказано.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОТ МНОГИХ АРГУМЕНТОВ

В обратную сторону. Пусть f – непрерывна по 1-ому и 2-ому аргументам в отдельности, и пусть

$\{(a_i, b_i) \mid a_i \in D_1, b_i \in D_2, i \in I\}$ – цепь в $D_1 \times D_2$. Тогда:

$f(\sqcup \{(a_i, b_i) \mid i \in I\}) =$ (согласно **утверждению 6**)

$f(\sqcup \{a_i \mid i \in I\}, \sqcup \{b_j \mid j \in I\}) =$ (по непрерывности f в D_1)

$\sqcup \{f(a_i, \sqcup \{b_j \mid j \in I\}) \mid i \in I\} =$ (по непрерывности f в D_2)

$\sqcup \{\sqcup \{f(a_i, b_j) \mid j \in I\} \mid i \in I\}$

Обозначим в последнем выражении $f(a_i, b_j)$ через x_{ij} .

Для $i \leq k$ и $j \leq l$ имеем $(a_i, b_j) \sqsubseteq (a_k, b_j) \sqsubseteq (a_k, b_l)$, т.к. $\{a_i \mid i \in I\}$ и $\{b_j \mid j \in I\}$ – цепи, откуда следует, что $f(a_i, b_j) \sqsubseteq f(a_k, b_j) \sqsubseteq f(a_k, b_l)$, а следовательно $x_{ij} \sqsubseteq x_{kl}$. Отсюда, в силу **утверждения 6**, получаем:

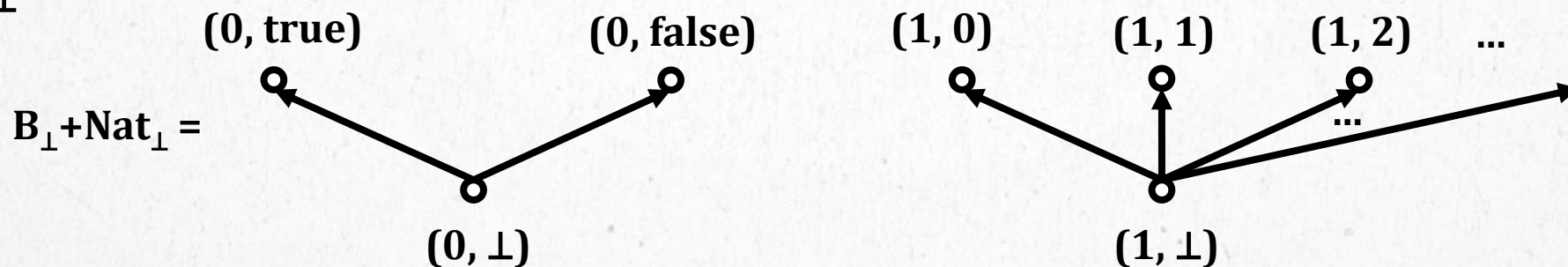
$\sqcup \{\sqcup \{f(a_i, b_j) \mid j \in I\} \mid i \in I\} = \sqcup \{f(a_k, b_k) \mid k \in I\} = \sqcup \{f(a_i, b_i) \mid i \in I\}.$

Таким образом, справедливо $f(\sqcup \{(a_i, b_i) \mid i \in I\}) = \sqcup \{f(a_i, b_i) \mid i \in I\}$, что завершает доказательство **утверждения 5**.

РАЗМЕЧЕННОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ

Определение 6. Для множеств A и B их размеченное объединение $A+B$ есть множество $\{(0, a) \mid a \in A\} \cup \{(1, b) \mid b \in B\}$, частично упорядоченное отношением $\sqsubseteq_{A+B}$, причем $d \sqsubseteq_{A+B} d'$, если и только если $d=(0, a)$, $d'=(0, a')$ и $a \sqsubseteq_A a'$, либо $d=(1, b)$, $d'=(1, b')$ и $b \sqsubseteq_B b'$.

На рисунке приведен пример размеченного объединения $B_\perp$ и $\text{Nat}_\perp$



Размеченное объединение можно расширить и на произвольное количество аргументов. Порядок на элементах размеченного объединения определяется аналогично порядку на $A+B$.

ОПЕРАЦИИ РАЗМЕТКИ И ПРОЕКТИРОВАНИЯ

С размеченным объединением связываются операции разметки и проектирования.

Пусть $D = D_1 + D_2 + \dots + D_n$. Тогда, если $x \in D_i$, $1 \leq i \leq n$, то элемент $(i, x) \in D$ (**разметка элементов D**).

Обратно, если $(j, x) \in D$, $1 \leq j \leq n$, то результатом проектирования этого элемента на D_i , $1 \leq i \leq n$, является элемент D_i (обозначается как $((j, x) \mid D_i)$), определяемый следующим образом:

$$((j, x) \mid D_i) = \begin{cases} x, & \text{если } i = j, \\ \perp D_i, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

где $\perp D_i$ обозначает нижний элемент в области D_i .

РАЗМЕЧЕННОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ, РАЗМЕТКА И ПРОЕКТИРОВАНИЕ

Утверждение 7. Если A и B – частично упорядоченные множества, любые цепи которых имеют н.в.г., то $A+B$ есть также частично упорядоченное множество, любая цепь которого имеет н.в.г., и операции, ассоциированные с $A+B$ (разметка и проектирование), являются непрерывными.

Отметим, что в некоторых исследованиях операция размеченного объединения предполагает добавление нижнего элемента для получаемой области.

В этом случае $A+B$ содержит также элемент $\perp_{A+B}$, являющийся менее определенным, чем элементы $(0, \perp_A)$ и $(1, \perp_B)$, соответственно.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ

Определение 7. Для частично упорядоченных множеств A и B их функциональная область $A \rightarrow B$ есть множество всех непрерывных функций с областью определения A и областью значений B , частично упорядоченная отношением $\sqsubseteq_{A \rightarrow B}$, причем для $\forall f, g \in A \rightarrow B$ $f \sqsubseteq_{A \rightarrow B} g$, если и только если для $\forall a \in A$ $f(a) \sqsubseteq_B g(a)$.

Утверждение 8. Если A и B – частично упорядоченные множества, любые цепи которых имеют н.в.г., то $A \rightarrow B$ есть также частично упорядоченное множество, любая цепь которого имеет н.в.г., и операции, ассоциированные с $A \rightarrow B$, являются непрерывными.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ

Доказательство. Пусть $C = \{f_i: A \rightarrow B \mid i \in I\}$ – цепь. Для $\forall a_j \in A$ множество $A_j = \{f_i(a_j) \mid i \in I\}$ – цепь в B (в силу определения частичного порядка в $A \rightarrow B$). Поскольку B – частично упорядоченное множество, в котором любая цепь имеет н.в.г., то $\sqcup A_j$ существует для любого j .

Определим функцию $g: A \rightarrow B$ следующим образом: $g(a_j) = \sqcup A_j$ для $a_j \in A$. Покажем, что g есть н.в.г. цепи C .

Для этой цели, в соответствии с определением н.в.г., необходимо показать, что:

- 1) $\forall i, i \in I, f_i \sqsubseteq g$;
- 2) если существует функция q , такая что $\forall i, i \in I, f_i \sqsubseteq q$, то $g \sqsubseteq q$.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ

Для $\forall a_j, j \in I$, и для $\forall f_i, i \in I$, имеем:

$f_i(a_j) \sqsubseteq \sqcup \{f_i(a_j) \mid i \in I\} = \sqcup A_j = g(a_j)$, откуда следует, что $f_i \sqsubseteq g$.

Покажем далее выполнение второго условия.

Пусть q – функция, такая что $f_i \sqsubseteq q, i \in I$.

Это означает, что для $\forall a_j, j \in I$, $f_i(a_j) \sqsubseteq q(a_j)$, а следовательно $\sqcup \{f_i(a_j) \mid i \in I\} \sqsubseteq q(a_j)$, откуда вытекает, что $g(a_j) \sqsubseteq q(a_j)$, а следовательно, $g \sqsubseteq q$, что завершает доказательство того, что g есть н.в.г. цепи C .

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ

Покажем теперь, что ассоциированные с областью $A \rightarrow B$ операция применения функции и операция абстракции являются непрерывными.

Покажем вначале, что g – непрерывная функция.

Пусть $X = \{a_j \in A \mid j \in I\}$ – цепь. Тогда:

$\sqcup \{g(a_j) \mid j \in I\} = \sqcup \{\sqcup \{f_i(a_j) \mid i \in I \mid j \in I\} \mid j \in I\}$ (по определению функции g)

Обозначим в последнем выражении $f_i(a_j)$ через x_{ij} . Для $i \leq k$ и $j \in I$ имеем $f_i(a_j) \sqsubseteq f_i(a_1) \sqsubseteq f_k(a_1)$, так как $\{a_j \mid j \in I\}$ – цепь в A и $\{f_i \mid i \in I\}$ – цепь в C , а следовательно $x_{ij} \sqsubseteq x_{ki}$. Отсюда, в силу **утверждения 6**, получаем $\sqcup \{\sqcup \{f_i(a_j) \mid i \in I \mid j \in I\} \mid j \in I\} = \sqcup \{\sqcup \{f_i(a_j) \mid j \in I \mid i \in I\} \mid i \in I\}$.

Далее, так как все функции f_i – непрерывны, то $\sqcup \{\sqcup \{f_i(a_j) \mid j \in I \mid i \in I\} \mid i \in I\} = \sqcup \{f_i(\sqcup \{a_j \mid j \in I\}) \mid i \in I\} = \sqcup \{f_i(\sqcup X) \mid i \in I\} = g(\sqcup X) = g(\sqcup \{a_j \mid j \in I\})$, откуда следует непрерывность функции g .

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ

Покажем теперь, что применение функции является непрерывной операцией. Операция применения функции (**apply**) может рассматриваться как функция от двух аргументов: $f(x) = \text{apply}(f, x)$.

В силу **утверждения 5** для доказательства непрерывности операции **apply** достаточно доказать ее непрерывность по каждому аргументу в отдельности.

Пусть $g = \sqcup \{f_i : A \rightarrow B \mid i \in I\}$. Тогда:

$\sqcup \{f_i(x) \mid i \in I\} =$ (по определению g)

$g(x) = (\sqcup \{f_i \mid i \in I\})(x)$, откуда следует непрерывность операции **apply** по первому аргументу.

Далее, для непрерывной функции f имеем:

$\sqcup \{f(x_j) \mid j \in I\} = f(\sqcup \{x_j \mid j \in I\})$, что означает непрерывность операции **apply** по второму аргументу, а следовательно, операция применения функции является непрерывной.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ

Остается показать, что операция функциональной абстракции является непрерывной.

Пусть $\{e_i \mid i \in I\}$ – множество выражений, таких что для $\forall a \in A$, $\{e_i[a/x] \mid i \in I\}$ является цепью в B . Тогда, по определению частичного порядка, $\{\lambda x.e_i \mid i \in I\}$ – цепь в $A \rightarrow B$.

Ранее было показано, что $\sqcup \{\lambda x.e_i \mid i \in I\}$ есть непрерывная функция g , такая что: $g(a) = \sqcup \{(\lambda x.e_i)(a) \mid i \in I\} = \sqcup \{e_i[a/x] \mid i \in I\}$.

Таким образом, имеем:

$g = \lambda a. \sqcup \{e_i[a/x] \mid i \in I\} = \lambda x. \sqcup \{e_i[x/x] \mid i \in I\} = \lambda x. \sqcup \{e_i \mid i \in I\}$, откуда следует непрерывность операции функциональной абстракции.

Таким образом, **утверждение 8** полностью доказано.

СЛЕДСТВИЕ И ТЕОРЕМА

Следствие. Если A – частично упорядоченное множество, каждая цепь которого имеет н.в.г., и B – п.ч.п., то $A \rightarrow B$ – п.ч.п.

Доказательство.

Для доказательства этого необходимо лишь показать существование наименее определенного элемента в области $A \rightarrow B$. Очевидно, что таким элементом является функция $f: A \rightarrow B$, определенная как $f(a) = b_0$, где b_0 – наименьший элемент в B , ч.т.д.

Из предыдущих результатов вытекает следующая **теорема**:

Любая операция, построенная с помощью функциональной нотации, является, непрерывной функцией.

Семантика фиксированной точки оперирует на областях, являющихся п.ч.п.

Наименьший элемент области является начальным элементом для построения решения. Начальный элемент области может быть получен либо в результате конструирования сложной области, либо в результате добавления его к области.

Символ $\perp$ будет использоваться далее вместо минимального элемента п.ч.п., независимо от того, получен ли он в результате построения области, либо в результате его добавления к области.

В дальнейшем будем рассматривать **fix** как конструктор.

Для любой области **D**, являющейся п.ч.п., и непрерывной функции **F: D → D** запись **fix F** обозначает н.в.г. цепи, индуцированной из **F**.