

ФОРМАЛИЗАЦИЯ СЕМАНТИКИ ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКИ

Рассмотрим класс областей, используемых для задания семантики минимальной фиксированной точки.

Покажем, что семантические области, используемые при задании денотационной семантики языков программирования, принадлежат этому классу.

Это позволяет использовать аппарат семантики минимальной фиксированной точки для определения значений программ.

ЧАСТИЧНО-УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА (ЧУМ)

Определение 1. Множество P частично упорядочено отношением $\sqsubseteq$ ($\leq$, $\preceq$ произносится «слабее, чем» или «менее определен, чем»), если для любых $x, y, z \in P$ имеют место следующие свойства:

1) **рефлексивность:** $x \sqsubseteq x$

2) **антисимметричность:** из $x \sqsubseteq y$ и $y \sqsubseteq x$ следует, что $x \equiv y$

3) **транзитивность:** из $x \sqsubseteq y$ и $y \sqsubseteq z$ следует, что $x \sqsubseteq z$

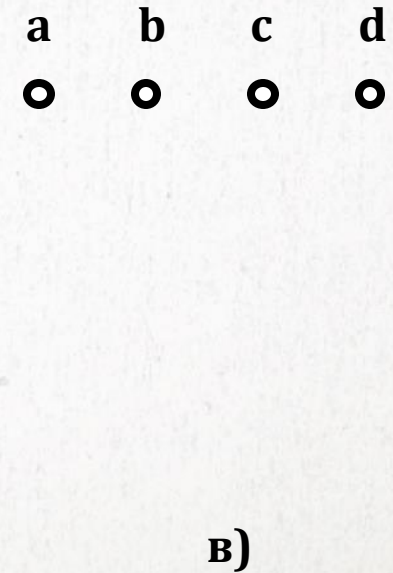
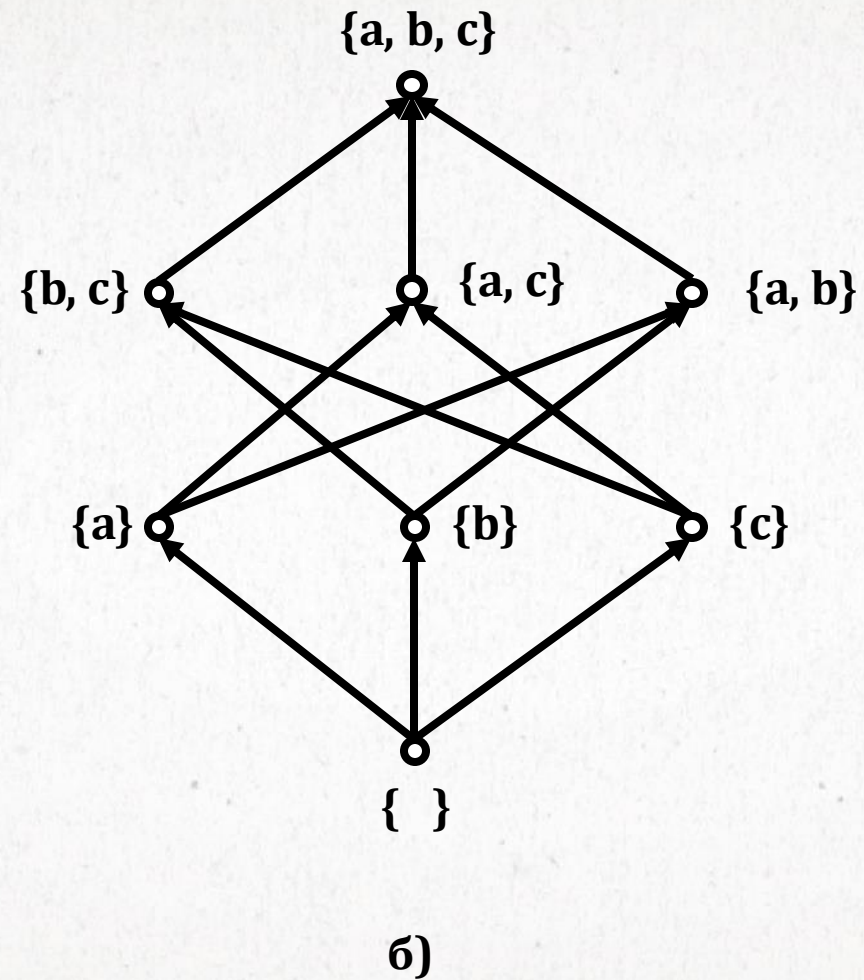
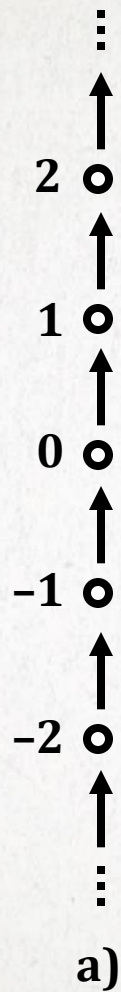
ЧАСТИЧНО-УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Частично упорядоченное множество элементов может быть представлено ациклическим графом, где $x \leq y$, когда имеется дуга из x в y .

Пусть E – некоторое множество.

Обозначая через $\mathbb{P}(E)$ множество всех подмножеств множества E , можно использовать отношение включения $\subseteq$ для задания частичного порядка на элементах $\mathbb{P}(E)$.

ПРИМЕРЫ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ



МИНИМАЛЬНАЯ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННАЯ СТРУКТУРА

Минимальной частично упорядоченной структурой на множестве P является дискретный частичный порядок, при котором каждый элемент P слабее, чем он сам ($d \sqsubseteq d$) и не соотносится ни с каким другим элементом, т.е. для $d, e \in P$, $d \sqsubseteq e$, если и только если $d \equiv e$.

Определение 2. Если в частично упорядоченном множестве P существует элемент $s \in P$, такой, что для $\forall d \in P$ $s \sqsubseteq d$, то s является самым слабым (или «наименее определенным») элементом в P и обозначается символом $\perp$, читаемым как «нижний элемент».

ОПЕРАЦИИ НАД ЭЛЕМЕНТАМИ ЧУМ

Определение 3. Пусть P – множество, частично упорядоченное отношением $\sqsubseteq$. Тогда для $\forall a, b \in P$ выражение $a \sqcup b$ обозначает элемент P (если он существует) такой, что:

- 1) $a \sqsubseteq a \sqcup b$ и $b \sqsubseteq a \sqcup b$;
- 2) для $\forall d \in P$ из $a \sqsubseteq d$ и $b \sqsubseteq d$ следует, что $a \sqcup b \sqsubseteq d$.

Элемент $a \sqcup b$ напоминает результат теоретико-множественного объединения элементов a и b .

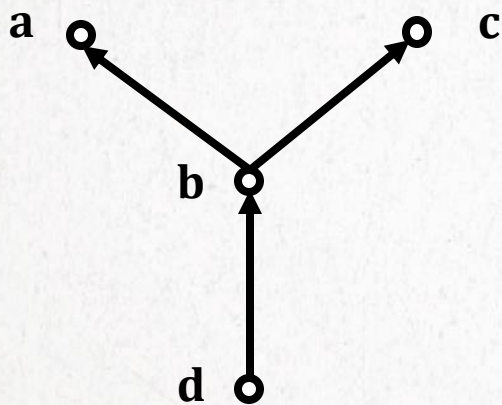
Операция $\sqcup$ производит элемент, который более определен, чем оба аргумента этой операции.

Если имеется более, чем один такой элемент, то в качестве результата выбирается наименее определенный из всех таких элементов.

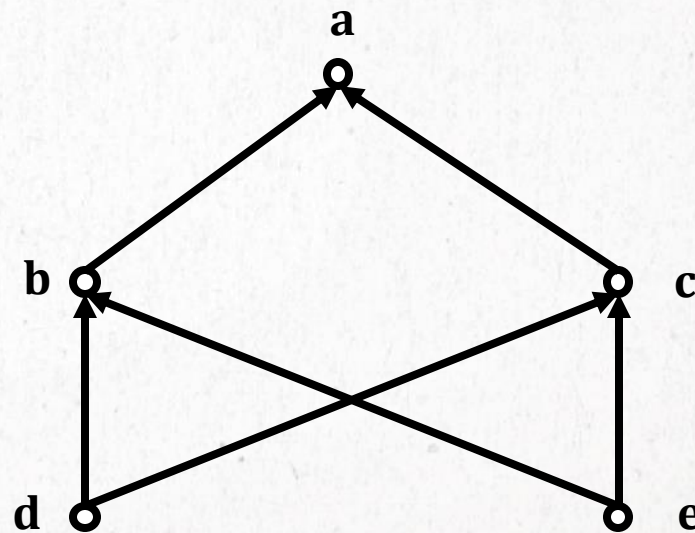
НАИМЕНЬШАЯ ВЕРХНЯЯ ГРАНЬ (Н.В.Г.)

Элемент $a \sqcup b$ называют **наименьшей верхней гранью (н.в.г.)** элементов a и b .

Частично упорядоченное множество может не иметь н.в.г. для всех его пар элементов.



г)



д)

НАИБОЛЬШАЯ НИЖНЯЯ ГРАНЬ (Н.Н.Г.)

Определение 4. Пусть P – множество, частично упорядоченное отношением $\sqsubseteq$. Тогда для $\forall a, b \in P$ выражение $a \sqcap b$ обозначает элемент P (если он существует) такой, что:

1) $a \sqcap b \sqsubseteq a$ и $a \sqcap b \sqsubseteq b$;

2) для $\forall d \in P$ из $d \sqsubseteq a$ и $d \sqsubseteq b$ следует, что $d \sqsubseteq a \sqcap b$.

Элемент $a \sqcap b$ напоминает результат теоретико-множественного пересечения элементов a и b . Операция $\sqcap$ производит элемент, который менее определен, чем оба аргумента этой операции. Если имеется более, чем один такой элемент, то в качестве результата выбирается наиболее определенный из всех таких элементов.

Элемент $a \sqcap b$ называют также **наибольшей нижней гранью (н.н.г.)** элементов a и b .

Частично упорядоченное множество может не иметь н.н.г. для всех его пар элементов.

РЕШЕТКИ

Определение 5. Множество P , частично упорядоченное отношением $\sqsubseteq$, называется **решеткой**, если и только если для $\forall a, b \in P$ $a \sqcup b$ и $a \sqcap b$ существуют одновременно.

Понятие **н.в.г.** и **н.н.г.** можно обобщить на множества (возможно, бесконечные) аргументов.

Определение 6. Для множества P , частично упорядоченного отношением $\sqsubseteq$, и подмножества $X \subseteq P$ выражение $\sqcup X$ обозначает элемент P (если он существует) такой, что:

- 1) для $\forall x \in X$ $x \sqsubseteq \sqcup X$;
- 2) для $\forall d \in P$, если для $\exists x \in X$ $x \sqsubseteq d$, то $\sqcup X \sqsubseteq d$.

Элемент $\sqcup X$ называют **наименьшей верхней гранью** подмножества X .

РЕШЕТКИ

Определение 7. Для множества P , частично упорядоченного отношением $\sqsubseteq$, и подмножества $X \subseteq P$ выражение $\sqcap X$ обозначает элемент P (если он существует) такой, что:

- 1) для $\forall x \in X \quad \sqcap X \sqsubseteq x$;
- 2) для $\forall d \in P$, если для $\exists x \in X \quad d \sqsubseteq x$, то $d \sqsubseteq \sqcap X$.

Элемент $\sqcap X$ называют **наибольшей нижней гранью** подмножества X .

Определение 8. Множество P , частично упорядоченное отношением $\sqsubseteq$, называется **полной решеткой**, если и только если для всякого подмножества $X \subseteq P$ существуют одновременно элементы $\sqcup X$ и $\sqcap X$.

Любая решетка с конечным числом элементов является **полной решеткой**.

ПОЛНЫЕ РЕШЕТКИ

В полной решетке P всегда имеется элемент $\perp P$, являющийся нижним элементом P (обозначается через ∞).

Кроме того, в полной решетке P всегда имеется верхний элемент $\top P$ (обозначается через $/$).

Полные решетки являются вполне подходящими областями для описания семантики языков программирования и часто применяются для построения денотационной семантики языков программирования.

РЕШЕТКИ, ЦЕПИ

Для построения **семантики минимальной фиксированной точки** не требуется, чтобы области были решетками и, тем более, полными решетками.

Единственным свойством, необходимым для частично упорядоченных множеств, является существование наименьших верхних граней для тех множеств, которые представляют семейства подфункций. Этим объясняется введение следующих определений.

Определение 9. Для частично упорядоченного множества P непустое подмножество $X \subseteq P$ является **цепью** (или линейно упорядоченным множеством), если для любых $x, y \in X$ либо $x \sqsubseteq y$, либо $y \sqsubseteq x$.

Следствие. Каждое подмножество цепи является цепью.

РЕШЕТКИ, ЦЕПИ

Цепи могут быть **конечными** или **бесконечными**.

Цепь может рассматриваться как математическая абстракция семейства согласованных функций. Поэтому важно убедиться, что такие цепи всегда имеют наименьшие верхние грани.

Поскольку решетки могут не иметь н.в.г. для бесконечных цепей, то они не подходят в качестве областей для построения теории семантики минимальной фиксированной точки.

С другой стороны, требование к области быть полной решеткой является слишком сильным.

Компромиссом являются области, называемые **полными частичными порядками**.

ПОЛНЫЙ ЧАСТИЧНЫЙ ПОРЯДОК (п.ч.п.)

Определение 10. Частично упорядоченное множество P является **полным частичным порядком (п.ч.п.)**, если:

- 1) в множестве P существует нижний элемент $\perp$, такой что $\perp \sqsubseteq x$ для всех $x \in P$;
- 2) каждая цепь $X \subseteq P$ имеет наименьшую верхнюю грань в P (т.е. элемент $\sqcup X \in P$).

Требование быть просто частично упорядоченным множеством является слишком слабым для построения решений рекурсивно определенных функций. Решения рекурсивно определенных функций оказываются элементами п.ч.п.

П.ч.п., как видно из определения, предполагает существование нижнего элемента $\perp$ для всех элементов $x \in P$, а следовательно и н.н.г. P (элемента $\perp P$), но не требует существования н.в.г. для всех элементов $x \in P$ (т.е. существования $\sqcup P$), а лишь существование н.в.г. для всех ее цепей.